ANNALES IMPÔTS 2017 à 2019
Épreuves de mathématiques

Concours d'inspecteur des finances publiques première et seconde classe



Assemblées par D.-J. Mercier
et disponibles sur MégaMaths
megamaths.byethost5.com/
facebook.com/avantimegamaths



DIRECTION GÉNÉRALE DES FINANCES PUBLIQUES

CONCOURS EXTERNE POUR L'ACCÈS AU GRADE D'INSPECTEUR DES FINANCES PUBLIQUES

ANNÉE 2017

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N°2

Durée : 3 heures - Coefficient : 5

Mathématiques

Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.

Recommandations importantes

Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.

Sous peine d'annulation de sa copie, le candidat ne doit porter aucun signe distinctif (nom, prénom, signature, numéro de candidature, etc.) en dehors du volet rabattable d'en-tête.

Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.



Tournez la page S.V.P

Le candidat devra compléter l'intérieur du volet rabattable des informations demandées et se conformer aux instructions données

Nom de naissance

Prénom usuel

Jour, mois et année

Numéro de candidature

Signature obligatoire

Nom : ....
Prénom : ....
Date de naissance : ....
N° de candidature : ....
(si absence de code barre)
Signature :

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Faire comme ceci

Ne pas faire

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

À compléter par le candidat

Ne rabattre le cache qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance

Concours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel (1)
(1) Rayer les mentions inutiles

Concours externe

Pour l'emploi de : Inspecteur des Finances publiques

Épreuve n° : 2

Matière : 030

Date : 0 6 0 9 2 0 1 6

Nombre d'intercalaires supplémentaires :

Préciser éventuellement le nombre d'intercalaires supplémentaires

À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.

Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement. Une autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

Les étiquettes d'identification codes à barres, destinées à permettre à l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées dans les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.

Suivre les instructions données pour les étiquettes d'identification

NOTE / 20
,

RÉSERVÉ À L'ADMINISTRATION

À L'ATTENTION DU CORRECTEUR

Pour remplir ce document :

Utilisez un stylo ou une pointe feutre de couleur NOIRE ou BLEUE.

EXEMPLE DE MARQUAGE : Faire comme ceci — Ne pas faire

Pour porter votre note, cochez les gélules correspondantes.

Reportez la note dans les zones **NOTE / 20** et dans le cadre **A**

En cas d'erreur de codification dans le report des notes cochez la case **erreur** et reportez la note dans le cadre **B**.

Cadre **A** réservé à la notation

20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00

Décimales

,00	,25	,50	,75

Cadre **B** réservé à la notation rectificative

20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00

Décimales

,00	,25	,50	,75

Erreur

NOTE / 20
,

N°140 - IMPRIMERIE NATIONALE 2014 01 51061 PO - Juin 2014 - 145 112

EN AUCUN CAS, LE CANDIDAT NE FERMERA LE VOLET RABATTABLE AVANT D'Y AVOIR ÉTÉ AUTORISÉ PAR LA COMMISSION DE SURVEILLANCE

SUJET

MATHÉMATIQUES

Code matière : 030

Les candidats sont autorisés à utiliser les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique et les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen ».

Les téléphones portables sont interdits y compris pour leur fonctionnalité accessoire de calculatrice.

L'utilisation de tout autre document ou matériel est interdite.

EXERCICE 1

Soit une matrice

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.

2. A est-elle diagonalisable ?

3. Déterminer les sous-espaces propres.

4. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.

5. Calculer A^n pour tout entier naturel.

EXERCICE 2

Soit z un nombre complexe non nul. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Le module de z est égal au module de son conjugué.

2. L'argument de z est l'opposé de l'argument de son conjugué.

3. Le produit de z par une racine n-ième de l'unité a le même module que z.

Tournez la page S.V.P.

4. L’argument de -z est l’opposé de l’argument de z.

5. Si la partie imaginaire de z est positive, alors son argument est compris entre 0 et π.

6. L’argument de z^2 est le double de l’argument de z.

7. L’argument de $\frac{z}{\bar{z}}$ est égal à l’argument de z^2.

EXERCICE 3

La comète de Halley a une période de 76 ans, cela signifie que cette comète passe au plus près du soleil tous les 76 ans. La comète de Herschel-Rigollet a une période de 155 ans. Les derniers passages de ces comètes près du Soleil datent de 1986 pour la comète de Halley et 1939 pour la comète de Hershel-Rigollet. En quelle année ces deux comètes seront-elles, à nouveau, au plus près du soleil en même temps ? *Nous supposerons que les comètes ont une période constante et seront suffisamment stables dans le futur.*

EXERCICE 4

Démontrer que pour tout n, entier naturel supérieur à 2 :

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)=\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}$$

(avec un certain nombre de racines carrées)

EXERCICE 5

Dans cet exercice, on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2< e < 3$

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \phi(x)=x^2 e^x-1$

1. Dresser le tableau de variations de ϕ, en précisant la limite de ϕ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$

2. Etablir que l'équation $e^x=\frac{1}{x^2}$, d'inconnue $x\in]0;+\infty]$, admet une solution et une seule, notée α et que α appartient à l'intervalle $]\frac{1}{2};1]$.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f(x)=x^3 e^x$,

et la suite réelle $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$.

Partie II : Étude d'une suite

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1$.

4. Etablir que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

5. Quelle est la limite de U_n lorsque *n* tend vers l'infini ?

Partie III : Étude d'une série

6. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \sum_{n \geq 1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$.

7. Montrer : $\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}$

J. 17 1791

DIRECTION GÉNÉRALE DES FINANCES PUBLIQUES

CONCOURS EXTERNE POUR L'ACCÈS AU GRADE D'INSPECTEUR DES FINANCES PUBLIQUES

ANNÉE 2018

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2

Durée : 3 heures - Coefficient : 5

Mathématiques

Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.

Recommandations importantes
Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.
Sous peine d'annulation de sa copie, le candidat ne doit porter aucun signe distinctif (nom, prénom, signature, numéro de candidature, etc.) en dehors du volet rabattable d'en-tête.
Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.



Tournez la page S.V.P.

Le candidat devra compléter l'intérieur du volet rabattable des informations demandées et se conformer aux instructions données

Nom de naissance

Prénom usuel

Jour, mois et année

Numéro de candidature

Signature obligatoire

Nom : ....
Prénom : ....
Date de naissance : ....
N° de candidature : ....
(si absence de code barre)
Signature :

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

Faire comme ceci

Ne pas faire

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

À compléter par le candidat

Ne rabattre le cache qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance

Concours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel (1)
(1) Rayer les mentions inutiles

externe

Pour l'emploi de : Inspecteur des Finances publiques

Épreuve n° : 2

Préciser éventuellement le nombre d'intercalaires supplémentaires

Matière : 030 – Mathématiques

Date : 0 5 0 9 2 0 1 7

Nombre d'intercalaires supplémentaires :

À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.

Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement. Une autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

Les étiquettes d'identification codes à barres, destinées à permettre à l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées dans les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.

Suivre les instructions données pour les étiquettes d'identification

NOTE / 20
,

RÉSERVÉ À L'ADMINISTRATION

À L'ATTENTION DU CORRECTEUR

Pour remplir ce document :

Utilisez un stylo ou une pointe feutre de couleur NOIRE ou BLEUE.

EXEMPLE DE MARQUAGE : Faire comme ceci — Ne pas faire

Pour porter votre note, cochez les gélules correspondantes.

Reportez la note dans les zones **NOTE / 20** et dans le cadre **A**

En cas d'erreur de codification dans le report des notes cochez la case **erreur** et reportez la note dans le cadre **B**.

Cadre A réservé à la notation

20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00

Décimales

,00	,25	,50	,75

Cadre B réservé à la notation rectificative

20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00

Décimales

,00	,25	,50	,75

Erreur

NOTE / 20
,

N°140 - IMPRIMERIE NATIONALE 2014 01 51061 PO - Juin 2014 - 145 112

EN AUCUN CAS, LE CANDIDAT NE FERMERA LE VOLET RABATTABLE AVANT D'Y AVOIR ÉTÉ AUTORISÉ PAR LA COMMISSION DE SURVEILLANCE

DIRECTION GÉNÉRALE DES
FINANCES PUBLIQUES

SUJET

MATHÉMATIQUES

Code matière : 030

Les candidats sont autorisés à utiliser les matériels suivants :

- les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;

- les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen ».

Sont interdits :

- les téléphones portables ainsi que les montres et/ou tout autres objets et accessoires connectés ;

- les règles de calcul, compas, équerres, rapporteurs et tables de logarithmes ;

- l'utilisation de tout autre document ou matériel autre que le matériel nécessaire pour composer.

Le candidat traitera tous les exercices suivants.

EXERCICE 1

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie comme suit :

$f(0)=1$, et pour tout x de $]-\infty;0[\cup]0;1[$, $f(x)=\dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}$

1) Montrer que f est continue sur $]-\infty;1[$.

2) a) Déterminer le développement limité de $\ln(1-x)$ à l'ordre 2 lorsque x est au voisinage de 0.

b) En déduire que f est dérivable en 0, puis vérifier que $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

3) a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x élément de $]-\infty;0[\cup]0;1[$.

b) Déterminer le signe de $\ln(1-x)+x$, lorsque x appartient à $]-\infty;1[$, puis en déduire les variations de f .

c) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variations.

4) a) Établir que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0\,;1[$, noté u_n, tel que $f(u_n)=n$ et donner la valeur de u_1.

b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$.

EXERCICE 2

1) Montrer que tous les couples d'entiers $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ tels que $11\mathrm{u}+7\mathrm{v}=1$ sont de la forme $(2+7\mathrm{k}\,,-3-11\mathrm{k})$ pour $k\in\mathbb{Z}$.

2) Rappel : si p est un nombre premier, alors $2^{(p-1)}\equiv 1[p]$ (petit théorème de Fermat).

a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{1000} par 7.

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{1000} par 11.

3) Déduire de 1) et 2), le reste de la division euclidienne de 2^{1000} par 77.

EXERCICE 3

Soit E l'espace vectoriel sur le corps des réels, composé des fonctions polynômes à coefficients réels à une inconnue réelle de degré inférieur ou égal à 2 et du polynôme nul.

$\forall\, p\in E$ on note p' la dérivée première de p et p'' la dérivée seconde de p

Φ : $p\to\Phi(p)$ définie par $\forall\, x\in\mathbb{R}$

$$[\Phi(p)](x)=\int_0^1 [a\,p(t)+bxt\,p'(x-t)+c\,x^2t^2\,p''(x-t)]dt \quad \text{où} \quad a,b,c\in\mathbb{R}$$

Nous noterons $\mathrm{B}(p_0,p_1,p_2)$ la base canonique de E avec $\forall\, x\in\mathbb{R}$

$p_0(x)=1\,;\, p_1(x)=x\,;\, p_2(x)=x^2$

1) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

2) a) Déterminer la matrice A de l'endomorphisme Φ dans B.

b) À quelle(s) condition(s) sur a, b, c l'endomorphisme Φ est-il bijectif ?

3) Considérons le cas particulier : $a=6 ; b=6 ; c=3$

a) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme Φ.

b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.

c) Déterminer pour tout entier naturel n non nul la matrice B de l'endomorphisme Φ^n dans la base B .

EXERCICE 4

Déterminer un polynôme du 3e degré $P(x)$, à coefficients réels, sachant que la courbe représentative de $y=P(x)$ passe par un minimum en $(x=1 ; y=2)$ et que le reste de la division de $P(x)$ par (x^2+3x+2) est $(3-x)$.

DIRECTION GÉNÉRALE DES FINANCES PUBLIQUES

CONCOURS EXTERNE POUR L'ACCÈS AU GRADE D'INSPECTEUR DES FINANCES PUBLIQUES

ANNÉE 2019

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2

Durée : 3 heures - Coefficient : 5

Mathématiques

Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.

Recommandations importantes

Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.

Sous peine d'annulation de sa copie, le candidat ne doit porter aucun signe distinctif (nom, prénom, signature, numéro de candidature, etc.) en dehors du volet rabattable d'en-tête.

Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.



Tournez la page S.V.P

Le candidat devra compléter l'intérieur du volet rabattable des informations demandées et se conformer aux instructions données

Nom de naissance

Prénom usuel

Jour, mois et année

Numéro de candidature

Signature obligatoire

Nom : ....
Prénom : ....
Date de naissance : ....
N° de candidature : ....
(si absence de code barre)
Signature :

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

Faire comme ceci

Ne pas faire

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

À compléter par le candidat

Ne rabattre le cache qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance

Concours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel [1]
[1] Rayer les mentions inutiles

Externe

Pour l'emploi de : Inspecteur des Finances publiques

Épreuve n° : 2

Préciser éventuellement le nombre d'intercalaires supplémentaires

Matière : 030 – Mathématiques

Date : 1 8 0 9 2 0 1 8

Nombre d'intercalaires supplémentaires :

À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.

Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement. Une autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

Les étiquettes d'identification codes à barres, destinées à permettre à l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées dans les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.

Suivre les instructions données pour les étiquettes d'identification

NOTE / 20

RÉSERVÉ À L'ADMINISTRATION

À L'ATTENTION DU CORRECTEUR

Pour remplir ce document :

Utilisez un stylo ou une pointe feutre de couleur NOIRE ou BLEUE.

EXEMPLE DE MARQUAGE : Faire comme ceci — Ne pas faire

Pour porter votre note, cochez les gélules correspondantes.

Reportez la note dans les zones NOTE / 20 et dans le cadre A

En cas d'erreur de codification dans le report des notes cochez la case erreur et reportez la note dans le cadre B.

Cadre A réservé à la notation		
20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00

Décimales: ,00 ,25 ,50 ,75

Cadre B réservé à la notation rectificative		
20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00

Décimales: ,00 ,25 ,50 ,75

Erreur

NOTE / 20

EN AUCUN CAS, LE CANDIDAT NE FERMERA LE VOLET RABATTABLE AVANT D'Y AVOIR ÉTÉ AUTORISÉ PAR LA COMMISSION DE SURVEILLANCE

N°140 - IMPRIMERIE NATIONALE 2014 01 51061 PO - Juin 2014 - 145 112

DIRECTION GÉNÉRALE DES FINANCES PUBLIQUES

SUJET

MATHÉMATIQUES

Code matière : 030

Les candidats sont autorisés à utiliser les matériels suivants :

- les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;

- les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen ».

Sont interdits :

- les téléphones portables ainsi que les montres et/ou tout autres objets et accessoires connectés ;

- l'utilisation de tout autre document ou matériel autre que le matériel nécessaire pour composer.

Le candidat traitera obligatoirement les quatre exercices suivants.

EXERCICE N° 1

Soit f une fonction continue de [0,1] dans [0,1].

1) Montrez que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un réel a de [0,1], tel que $f(a) = a$.

2) Le point fixe de f est-il nécessairement unique ? Justifiez.

EXERCICE N° 2

On note E , l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $B_E = (1,X,X^2)$ la base canonique de E.

Pour tout polynôme P de E, on note indifféremment P ou $P(X)$.

On note P' la dérivée de P et P'' la dérivée seconde de P.

On note, pour tout polynôme P de E :
$a(P) = P - XP'$, $b(P) = P - P'$, $c(P) = 2XP - (X^2-1)P'$
et $f = b \circ a - a \circ b$

1) Montrez que a est un endomorphisme de E.

Tournez la page S.V.P.

2) a) Déterminez la matrice A de a dans la base B_E de E.
b) Déterminez le rang de la matrice de A.

3) a) L'endomorphisme de a est-il bijectif ? Justifiez.
b) Déterminez Ker(a) et Im(a).

4) Montrez que b est un endomorphisme de E. Justifiez.

5) a) Montrez que b est bijectif. Justifiez.
b) Montrez que pour tout Q de E, on a : $b^{-1}(Q)=Q$ + Q' +Q''.

6) a) Montrez que b admet une valeur propre et une seule et déterminez celle-ci.
b) B la matrice de b dans la base B_E de E est-elle diagonalisable ? Justifiez.

7) Montrez que c est un endomorphisme de E.

8) Déterminez la matrice C de c dans la base B_E de E.

9) L'endomorphisme c est-il bijectif ? Justifiez.

10) La matrice C est-elle diagonalisable ? Justifiez.

11) Calculez f(P).

12) Montrez que $(BA-AB)^3=0$.

EXERCICE N° 3

Soit E^3 un espace affine de dimension 3, qui est aussi euclidien ; on considère f : $E^3 \to E^3$ telle que l'on a : $f(x,y,z)=(x',y',z')$ et

$$x' = y+1$$
$$y' = z-2$$
$$z' = x+3$$

1) Quelle est la nature de f ?

2) Donnez son axe si c'est une rotation ou un vissage.

On considère g : $E^3 \to E^3$ définie par $g(x,y,z)=(x',y',z')$ où

$$\begin{cases} x' = y-1 \\ y' = z+3 \\ z' = x-2 \end{cases}$$

3) Quelle est la nature de g ?

4) Donnez son axe si c'est une rotation ou un vissage.

EXERCICE N° 4

Soit $I=]1,+\infty[$. On désigne par *f* l'application de I dans $\mathbb{R}$, définie, pour tout $x\in I$ par

$$f(x)=\int_{x}^{x^2}\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}dt \quad .$$

On ne cherchera pas à exprimer *f* à l'aide de fonctions usuelles.

1) Déterminez le signe de *f(x)*.

2) Justifiez la dérivabilité de *f* sur *I*, et calculez *f'(x)* pour tout $x\in I$, on exprimera *f'(x)* de la manière la plus simple possible.

3) a) Montrez que pour tout $t\in I$,

$$t-1-\frac{(t-1)^2}{2}<\ln(t)<t-1$$

On pourra utiliser la formule de Taylor Lagrange entre 1 et t.

b) Déduisez l'existence et la valeur de la limite de *f(x)* pour *x* tendant vers 1 et *x>1*.

DIRECTION GÉNÉRALE DES FINANCES PUBLIQUES

CONCOURS EXTERNE
DE CONTRÔLEUR DES FINANCES PUBLIQUES

ANNÉE 2017

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2

Durée : 3 heures - Coefficient : 3

Le candidat traitera le présent sujet correspondant à l'option formulée dans son dossier d'inscription :

– Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.

Recommandations importantes

Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.

Sous peine d'annulation de sa copie, le candidat ne doit porter aucun signe distinctif (nom, prénom, signature, numéro de candidature, etc.) en dehors du volet rabattable d'en-tête.

Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.



Tournez la page S.V.P.

Le candidat devra compléter l'intérieur du volet rabattable des informations demandées et se conformer aux instructions données

Nom de naissance

Prénom usuel

Jour, mois et année

Numéro de candidature

Signature obligatoire

Nom : ....

Prénom : ....

Date de naissance : ....

N° de candidature : ....
(si absence de code barre)

Signature :

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Faire comme ceci

Ne pas faire

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

À compléter par le candidat

Ne rabattre le cache qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance

Concours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel [1]
[1] Rayer les mentions inutiles

Externe

Pour l'emploi de : Contrôleur des Finances publiques

Épreuve n° : 2

Matière : 030 – mathématiques

Date : 0 6 1 2 2 0 1 6

Nombre d'intercalaires supplémentaires :

Préciser éventuellement le nombre d'intercalaires supplémentaires

À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.

Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement. Une autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

Les étiquettes d'identification codes à barres, destinées à permettre à l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées dans les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.

Suivre les instructions données pour les étiquettes d'identification

N°140 - *IMPRIMERIE NATIONALE* 2014 01 51061 PO - Juin 2014 - 145 112

NOTE / 20
,

RÉSERVÉ À L'ADMINISTRATION

À L'ATTENTION DU CORRECTEUR

Pour remplir ce document :

Utilisez un stylo ou une pointe feutre de couleur NOIRE ou BLEUE.

EXEMPLE DE MARQUAGE : Faire comme ceci — Ne pas faire

Pour porter votre note, cochez les gélules correspondantes.

Reportez la note dans les zones **NOTE / 20** et dans le cadre **A**

En cas d'erreur de codification dans le report des notes cochez la case **erreur** et reportez la note dans le cadre **B**.

Cadre **A** réservé à la notation

20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00

Décimales

,00	,25	,50	,75

Cadre **B** réservé à la notation rectificative

20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00

Décimales

,00	,25	,50	,75

Erreur

NOTE / 20
,

EN AUCUN CAS, LE CANDIDAT NE FERMERA LE VOLET RABATTABLE AVANT D'Y AVOIR ÉTÉ AUTORISÉ PAR LA COMMISSION DE SURVEILLANCE

DIRECTION GÉNÉRALE DES FINANCES PUBLIQUES

SUJET

MATHÉMATIQUES

Les candidats sont autorisés à utiliser les matériels suivants :

- *les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;*
- *les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen ».*
- *les règles de calcul, équerre, compas et rapporteurs ainsi que les tables de logarithme ne comportant aucune formule algébrique, géométrique ou trigonométrique.*

Sont interdits les téléphones portables ainsi que les montres et/ou tout autres objets et accessoires connectés.

L'utilisation de tout autre document ou matériel est interdite.

Ce sujet comporte cinq exercices, indépendants les uns des autres.

Vous traiterez l'ensemble des exercices dans l'ordre choisi.

EXERCICE 1

Cet exercice a pour but d'étudier la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{x+2+\ln(x)}{x}$$

La courbe $\boldsymbol{C}$ est représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

<u>Partie I : Limites, asymptotes, variations</u>

1 – Limites

a) Calculer la limite $f(x)$ en 0^+ .

b) Vérifier que pour tout $x\in\ ]0\,;+\infty[$, $f(x)=1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln(x)}{x}$.

c) Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$ **.**

2 – Asymptotes

a) En déduire, l'existence de 2 asymptotes à la courbe $\boldsymbol{C}$. On appellera $\boldsymbol{d}$ l'asymptote verticale et $\boldsymbol{d'}$ l'asymptote horizontale.

b) Donner les équations de ces deux droites.

Tournez la page S.V.P.

3 – Sens de variation

On appellera $f'(x)$ la fonction dérivée de $f(x)$.

a) Démontrer que pour tout $x\in\ ]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-1-\ln(x)}{x^2}$.

b) Montrer que $f'(x)$ s'annule en $x=\mathrm{e}^{-1}$ en changeant de signe.

c) Déterminer la valeur de $f(\mathrm{e}^{-1})$.

d) Dresser le tableau de variations de $f(x)$.

Partie II : Position relative

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=1+\dfrac{2}{x}$ et $\boldsymbol{H}$ sa courbe représentative dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

Soit K le point d'intersection des courbes $\boldsymbol{C}$ par rapport à $\boldsymbol{H}$.

1 – Étudier la fonction $g(x)$.

a) Limites.

b) Dérivée.

c) Tableau de variation.

2 – Étudier $f(x)-g(x)$.

a) Calculer $f(x)-g(x)$.

b) Étudier son signe.

c) En déduire la position de $\boldsymbol{C}$ par rapport à $\boldsymbol{H}$ à l'aide d'un tableau.

3 – Intersection.

a) Donner les coordonnées exactes du point K .

Partie III : Calcul d'une aire

Soit $\boldsymbol{A}$ l'aire du domaine limité par les courbes $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{H}$ et par les droites d'équation $x=1$ et $x=\mathrm{e}^2$.

1 – Primitive.

Soit P(x) la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $P(x)=\dfrac{1}{2}(\ln(x))^2$.

Vérifier que $P(x)$ est une primitive de $\dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

2 – Calculer l'aire $\boldsymbol{A}$ en cm^2 .

EXERCICE 2

En 2010, Monsieur DELABILE a réalisé sa première déclaration d'impôt sur le revenu.
Il a déclaré son revenu annuel : 18 000 €.
Son impôt à payer s'est élevé à 1 600 €.
Une fois ses impôts réglés, son revenu net s'élevait donc à 16 400 €.

De 2011 à 2014, son revenu annuel a augmenté chaque année de 2 % et son impôt à payer a augmenté de 3 %.

Suite à la mise en place du prélèvement à la source, Monsieur DELABILE essaye d'avoir une idée de ce qu'il adviendrait de son revenu annuel net si l'évolution constatée de 2011 à 2014 se poursuivait.

Pour tout entier $n \geq 0$, on appellera :

R_n le montant en euros du revenu annuel de Monsieur DELABILE en l'an $(2010+n)$, ainsi R_0 = 18 000.

I_n le montant en euros de l'impôt correspondant payé par Monsieur DELABILE, ainsi I_0= 1 600.

U_n le montant du revenu net de Monsieur DELABILE une fois ses impôts payés, ainsi U_0= 16 400.

1 –

a) Exprimer U_n en fonction de R_n et I_n .

b) Calculer R_1, I_1, U_1, R_2, I_2 et U_2 .

c) Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$R_n = 18000^* (1{,}02)^n \quad .$$

$$I_n = 1\,600^* (1{,}03)^n \quad .$$

Préciser la nature de chaque suite, sa raison et son premier terme.

2 – Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$U_{n+1} - U_n = 360^* (1{,}02)^n - 48^* (1{,}03)^n \quad .$$

3 – Montrer que $U_{n+1} < U_n \Leftrightarrow n^* \ln\left(\frac{1{,}03}{1{,}02}\right) > \ln \frac{15}{2}$.

4 – Déterminer les entiers $n \geq 0$ qui vérifient : $n^* \ln\left(\frac{1{,}03}{1{,}02}\right) > \ln\left(\frac{15}{2}\right)$.

5 – Si l'évolution constatée ces dernières années se poursuit, Monsieur DELABILE verra-t-il son revenu net (après impôts prélevés) diminuer ?

EXERCICE 3

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

<u>Partie I</u> :

Monsieur BINGO, le directeur du casino de la commune LINGO, a été sensibilisé par son banquier sur le nombre de faux billets en circulation : 2 % des billets en circulation sont de faux billets.

Tournez la page S.V.P.

Afin de lutter contre cette fraude, il décide de s'équiper d'une machine à détecter les faux billets.

Monsieur BINGO se renseigne sur la fiabilité de cet appareil et découvre les propriétés suivantes :

⇒ si le billet est faux : la probabilité qu'il soit détecté comme faux est 0,99.

⇒ si le billet est vrai : la probabilité qu'il soit détecté comme vrai est 0,97.

Une marge d'erreur existe donc : un vrai billet peut-être détecté comme faux et vice-versa.

Pour se convaincre de sa bonne acquisition, Monsieur BINGO demande au vendeur d'effectuer un essai avec un billet quelconque.

On note F l'événement « le billet est faux ».

T l'événement « la machine a détecté un faux billet ».

$\bar{F}$ et $\bar{T}$ sont les événements contraires de F et T.

1 –

a) Déterminer la probabilité de $p(F)$, $p_F(T)$ et $p_{\bar{F}}(\bar{T})$. Élaborer un arbre de probabilité.

b) En déduire la probabilité de l'événement $F \cap T$.

2 – Démontrer que la probabilité que la machine détecte un faux billet est de 0,0492.

3 – Justifier par le calcul que : si la machine détecte un faux billet, il n'y a que 40 % de chances que le billet soit faux.

4 – Déterminer la probabilité que le billet soit vrai sachant qu'il n' a pas été détecté comme faux billet.

5 – Les événements F et T sont-ils indépendants ?

6 – Monsieur BINGO achète finalement l'appareil. Selon vous fait-il une bonne acquisition ?

Partie II :

Un joueur se rend dans le casino de Monsieur BINGO et joue à la roulette.

En lançant la roulette, il tombe sur un nombre aléatoire entre 0 et 36.

Il mise 10 € ;

– S'il tombe sur un nombre pair : il récupère sa mise et gagne 2 autres euros (gain de 2 euros).

– S'il tombe sur un nombre impair : il perd sa mise (perte de 10 euros).

– S'il tombe sur le chiffre 0 : il récupère sa mise et gagne 20 autres euros (gain de 20 euros).

On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur (une perte sera donc négative).

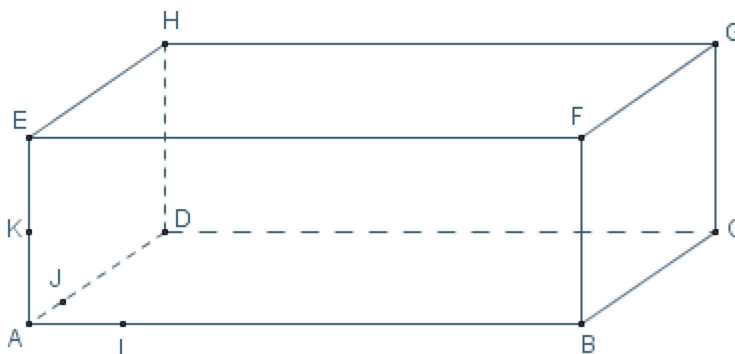
1 – Déterminer la loi de probabilité qui suit X.

2 – Donner l'espérance de X, notée E(X).

3 – Le jeu est-il favorable au joueur ?

EXERCICE 4

On considère un pavé droit ABCDEFGH ci-dessous.



AB=6cm   AD=4cm   AE=2cm.

I, J, K sont les points tels que :

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AI}\,;\overrightarrow{AJ}\,;\overrightarrow{AK})$.

1 –

a) Déterminer les coordonnées des points I, J et G.

b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IG}$, sont-ils colinéaires ?

2 – Déterminer une équation du plan (IJG).

3 – En déduire que le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (2 ; 2 ; -9) est normal au plan (IJG).

4 – Déterminer les coordonnées du point d'intersection W du plan (IJG) et de la droite (BF) à l'aide d'une représentation paramétrique de la droite (BF).

EXERCICE 5

Neuf personnes se présentent à l'accueil de l'Office HLM de la commune de FRANCLO.

Deux personnes assurent l'accueil du public. La première va recevoir 5 personnes, la seconde en recevra 4.

1 – De combien de façons différentes les 9 personnes peuvent-elles être réparties entre chacune des personnes assurant l'accueil ?

2 – 4 personnes se présentent pour obtenir un délai de paiement pour les loyers impayés et 5 personnes viennent régler leur loyer. De combien de façons différentes peut-on réaliser cette répartition, sachant que chaque agent d'accueil verra 2 personnes demandant un délai ?

3 – Monsieur ALEX qui demande un délai et Monsieur HENRI qui lui vient régler son loyer se connaissent et attendent ensemble. Ils seront donc reçus par le même agent. Combien de répartitions sont possibles ?



CONCOURS EXTERNE DE CONTRÔLEUR
DES FINANCES PUBLIQUES DE DEUXIÈME CLASSE

ANNÉE 2018

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2

Durée : 3 heures - Coefficient : 3

Le candidat traitera le présent sujet correspondant à l'option formulée dans son dossier d'inscription :

– Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.

Recommandations importantes

Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.

Sous peine d'annulation de sa copie, le candidat ne doit porter aucun signe distinctif (nom, prénom, signature, numéro de candidature, etc.) en dehors du volet rabattable d'en-tête.

Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.



Tournez la page S.V.P.

Le candidat devra compléter l'intérieur du volet rabattable des informations demandées et se conformer aux instructions données

Nom de naissance

Prénom usuel

Jour, mois et année

Numéro de candidature

Signature obligatoire

Nom : ....
Prénom : ....
Date de naissance : ....
N° de candidature : ....
(si absence de code barre)
Signature :

À compléter par le candidat

Ne rabattre le cache qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Faire comme ceci

Ne pas faire

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

Concours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel (1)
(1) Rayer les mentions inutiles

Externe

Pour l'emploi de : Contrôleur des Finances publiques

Épreuve n° : 2

Matière : 030 – Mathématiques

Date : 0 5 1 2 2 0 1 7

Nombre d'intercalaires supplémentaires :

Préciser éventuellement le nombre d'intercalaires supplémentaires

À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.

Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement. Une autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

Les étiquettes d'identification codes à barres, destinées à permettre à l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées dans les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.

Suivre les instructions données pour les étiquettes d'identification

NOTE / 20

RÉSERVÉ À L'ADMINISTRATION

À L'ATTENTION DU CORRECTEUR

Pour remplir ce document :

Utilisez un stylo ou une pointe feutre de couleur NOIRE ou BLEUE.

EXEMPLE DE MARQUAGE : Faire comme ceci — Ne pas faire

Pour porter votre note, cochez les gélules correspondantes.

Reportez la note dans les zones NOTE / 20 et dans le cadre A

En cas d'erreur de codification dans le report des notes cochez la case erreur et reportez la note dans le cadre B.

Cadre A réservé à la notation

20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00

Décimales

,00 ,25 ,50 ,75

Cadre B réservé à la notation rectificative

20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00

Décimales

,00 ,25 ,50 ,75

Erreur

NOTE / 20

N°140 - IMPRIMERIE NATIONALE 2014 01 51061 PO - Juin 2014 - 145 112

EN AUCUN CAS, LE CANDIDAT NE FERMERA LE VOLET RABATTABLE AVANT D'Y AVOIR ÉTÉ AUTORISÉ PAR LA COMMISSION DE SURVEILLANCE

DIRECTION GÉNÉRALE DES
FINANCES PUBLIQUES

SUJET

MATHÉMATIQUES

Les candidats sont autorisés à utiliser les matériels suivants :

- *les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;*
- *les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen ».*

Sont interdits :

- *les téléphones portables ainsi que les montres et/ou tout autres objets et accessoires connectés ;*
- *les règles de calcul, compas, rapporteurs et tables de logarithmes ;*
- *l'utilisation de tout autre document ou matériel autre que le matériel nécessaire pour composer.*

Ce sujet comporte cinq exercices, indépendants les uns des autres.

Vous traiterez l'ensemble des exercices dans l'ordre choisi.

EXERCICE 1

Soit 8 points de l'espace orthonormé $(0\ , \vec{i}\ , \vec{j}\ , \vec{k})$ définis comme suit :

A $(\alpha_1 , \alpha_1 , \alpha_1)$
B $(\alpha_1 + \alpha_2 , \alpha_1 , \alpha_1)$
C $(\alpha_1 + \alpha_2 , \alpha_1 + \alpha_2 , \alpha_1)$
D $(\alpha_1 , \alpha_1 + \alpha_2 , \alpha_1)$
E $(\alpha_1 , \alpha_1 , \alpha_1 + \alpha_2)$
F $(\alpha_1 + \alpha_2 , \alpha_1 , \alpha_1 + \alpha_2)$
G $(\alpha_1 + \alpha_2 , \alpha_1 + \alpha_2 , \alpha_1 + \alpha_2)$
H $(\alpha_1 , \alpha_1 + \alpha_2 , \alpha_1 + \alpha_2)$

Avec $\alpha_1 \neq \alpha_2$; α_1 et $\alpha_2 \in \mathbb{R}^*$.

Travail à effectuer

1) Montrez que $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont orthogonaux

2) Montrez que $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont égaux

Tournez la page S.V.P.

3) Que pouvez-vous en déduire à ce stade de la figure formée par EFGH ?

4) Soit I le milieu de [EG]. Montrez que $I \in (HF)$

5) Montrez que $||\overrightarrow{IH}||$ et $||\overrightarrow{IE}||$ sont égaux

6) Que pouvez-vous déduire de la nature de EFGH pour tout α_1 et $\alpha_2 \in R^+$?

7) Que déduisez-vous du quadrilatère ABCD ?

À partir de maintenant nous avons $\alpha_1 = 0$.

De plus on considère que si $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$ alors $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$

8) Montrez que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont égaux

9) Montrer que $||\overrightarrow{AE}||$ et $||\overrightarrow{AB}||$ sont égaux

10) On considère que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont orthogonaux. Que déduisez-vous sur la nature de la figure ABCDEFGH ?

EXERCICE 2

Partie A

Soit $P_n = 4^n + 5$

Démontrez que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un multiple de 3

Partie B

Soit U_n définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$U_1 = 1$$

$$U_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} U_n + \frac{3n+6}{2(n+1)}$$

1) Démontrez que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(U_n) < 3$

2) Étudiez le sens de variation de (U_n)

3) Calculez la limite de (U_n)

4) Soit (V_n) la suite définie sur IN^* par $V_n = n (3 - U_n)$

a) Déterminez la nature de cette suite

b) Précisez sa raison et calculer V_1

c) Exprimez (V_n) puis (U_n) en fonction de n

d) Calculez la limite de (U_n)

EXERCICE 3

Partie A

Soit une agence de location ayant un parc de 18 voitures.

10 voitures sont systématiquement louées à des clients réguliers.

La loi de probabilité du nombre de voitures louées par jour (nommée X) est donnée par le tableau suivant :

x_i	$P(X=x_i)$
11	0,10
12	0,17
13	0,27
14	0,25
15	0,12
16	0,05
17	0,03
18	0,01

Travail à effectuer

1) Déterminez l'espérance du nombre de voitures louées par jour

2) Déterminez l'écart type associé (3 décimales)

L'agence a 300 € de frais fixes par jour et sa marge par véhicule loué est de 20 €.

3) Calculez le bénéfice quotidien espéré.

4) Est-ce que l'agence est rentable ? Si non, déterminez de combien elle devra augmenter ses tarifs pour être sûre de pas perdre d'argent chaque jour.

Tournez la page S.V.P.

Partie B

Dans une fête foraine, un organisateur dispose de 2 sacs de 30 boules chacune.

Les boules sont indiscernables au toucher et ont la même probabilité d'être tirées.

Le S_1 sac numéro 1 comprend 27 boules blanches et 3 boules rouges.

Le S_2 sac numéro 2 comprend 21 boules blanches et 9 boules rouges.

La règle du jeu est la suivante :

– Le joueur mise 1 € et tire une boule dans le S_1 qu'il remet ensuite dans le S_1.
– Si la boule est rouge alors le joueur tire une boule dans le S_2 et note la couleur et s'arrête là.
– Si la boule est blanche il tire une boule dans le S_1 et note la couleur et s'arrête là.

Soit A et B les événements :
A : « Les deux boules tirées sont rouges »
B : « Une seule des boules tirées est rouge »

1) Déterminez $p(\text{A})$ et $p(\text{B})$ (Vous pourrez vous aider d'un arbre pondéré)

Si les deux boules obtenues sont rouges alors le joueur reçoit 10 €, si une seule boule est rouge il reçoit 2 € sinon il perd sa mise.

X désigne alors la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

2) Déterminez la loi de probabilité de X.

3) En déduire l'espérance mathématique de X. Qu'en déduisez-vous ?

Soit n un entier naturel supérieur à 2, le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes.

4) Démontrez que la probabilité p_n qu'il pioche au moins une fois dans le sac S_2 est de la forme $p_n = 1 - \alpha^n$. Vous déterminerez α.

5) Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0{,}9$?

EXERCICE 4

1) Résolvez l'inégalité suivante : $\ln(x^2 - 5x - 14) \geq \ln(2x^2 - 10x + 8)$

2) Déterminez une primitive de la fonction suivante :

$k(x) = 6 \sin(2x) \cos^3(2x)$ sur $\mathbb{R}$

3) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln x - x$

a) Étudiez les variations de f sur $[1\,;+\infty[$

b) Déduisez que pour tout $x \geq 1$ on a $0 \leq \ln x < x$

c) Prouvez alors que pour tout $x \geq 1$ on a $0 \leq \dfrac{\ln x}{2x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

d) Calculez alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$

4) Soit les deux intégrales définies par :

$$I = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx \quad \text{et } J = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx$$

a) Démontrez que $I = -J$ et aussi que $I = J + e^{\pi} + 1$

b) Vous en déduirez les valeurs exactes de I et de J

EXERCICE 5

Dans le plan Π muni d'un repère orthonormal $(o\,;\ \vec{e_1}, \vec{e_2})$, un point mobile M a une position à l'instant t ainsi définie :

le vecteur vitesse s'exprime en fonction de t par : $\vec{v}(t) = e^t \vec{e}_1 + \dfrac{e^t}{1+e^t} \vec{e}_2$.

1°) A l'instant t=0, les coordonnées de M sont (2,ln2).
Déterminez en fonction de t : les coordonnées (x(t), y(t)) du point mobile M.

2°) Démontrez que la trajectoire est une partie, à préciser, de la courbe d'équation y= ln x.

3°) Calculez le vecteur accélération $\vec{a}(t)$.

DIRECTION GÉNÉRALE DES FINANCES PUBLIQUES

CONCOURS EXTERNE
DE CONTRÔLEUR DES FINANCES PUBLIQUES DE DEUXIÈME CLASSE

ANNÉE 2019

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2

Durée : 3 heures - Coefficient : 3

Le candidat traitera le présent sujet correspondant à l'option formulée dans son dossier d'inscription :

– Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.

Recommandations importantes

Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.

Sous peine d'annulation de sa copie, le candidat ne doit porter aucun signe distinctif (nom, prénom, signature, numéro de candidature, etc.) en dehors du volet rabattable d'en-tête.

Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.



Tournez la page S.V.P.

Le candidat complétera l'intérieur du volet rabattable des informations demandées et se conformera aux instructions données

Nom de naissance

Prénom usuel

Jour, mois et année

Nom : ....
Prénom : ....
Date de naissance : ....
N° de candidature : ....
(si absence de code barre)
Signature :

Numéro de candidature

Signature obligatoire

À compléter par le candidat

Ne rabattre le cache qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Faire comme ceci

Ne pas faire

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

Concours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel (1)
(1) Rayer les mentions inutiles

Externe

Pour l'emploi de : ......**Contrôleur des Finances publiques**

Épreuve n° : **2**

Matière : **030 – Mathématiques**

Date : **0 4 1 2 2 0 1 8**

Nombre d'intercalaires supplémentaires :

Préciser éventuellement le nombre d'intercalaires supplémentaires

À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.

Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement. Une autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

Les étiquettes d'identification codes à barres, destinées à permettre à l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées dans les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.

Suivre les instructions données pour les étiquettes d'identification

NOTE / 20

RÉSERVÉ À L'ADMINISTRATION

À L'ATTENTION DU CORRECTEUR

Pour remplir ce document :

Utilisez un stylo ou une pointe feutre de couleur NOIRE ou BLEUE.

EXEMPLE DE MARQUAGE : Faire comme ceci — Ne pas faire

Pour porter votre note, cochez les gélules correspondantes.

Reportez la note dans les zones NOTE / 20 et dans le cadre A

En cas d'erreur de codification dans le report des notes cochez la case erreur et reportez la note dans le cadre B.

Cadre A réservé à la notation

20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00

Décimales

,00 ,25 ,50 ,75

Cadre B réservé à la notation rectificative

20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00

Décimales

,00 ,25 ,50 ,75

Erreur

NOTE / 20

EN AUCUN CAS, LE CANDIDAT NE FERMERA LE VOLET RABATTABLE AVANT D'Y AVOIR ÉTÉ AUTORISÉ PAR LA COMMISSION DE SURVEILLANCE

SUJET

MATHÉMATIQUES

Les candidats sont autorisés à utiliser les matériels suivants :

- *les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;*
- *les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen ».*

Sont interdits :

- *les téléphones portables ainsi que les montres et/ou tout autres objets et accessoires connectés ;*
- *les règles de calcul, compas, rapporteurs et tables de logarithmes ;*
- *l'utilisation de tout autre document ou matériel autre que le matériel nécessaire pour composer.*

Ce sujet comporte cinq exercices, indépendants les uns des autres.

Vous traiterez l'ensemble des exercices dans l'ordre choisi.

EXERCICE 1

Partie 1

On considère la fonction numérique d'une variable réelle, f définie par $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}}{x^3}$.

1.

a) Justifier que le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f est constitué par la réunion des intervalles $I_1=[-3;0[$ et $I_2=]0;+\infty[$.

b) Déterminer les limites de f aux bornes des intervalles I_1 et I_2. En déduire les équations des asymptotes horizontale et verticale à la courbe représentative de f notée $\mathcal{C}_f$.

2.

a) Montrer que pour tout $x\in\mathcal{D}_f\setminus\{-3\}$, la dérivée f ' de f est définie par $f'(x)=\frac{-(5x+18)}{2\sqrt{(x+3)}x^4}$.

Préciser la limite de f ' en -3.

b) Dresser le tableau de variations de f et tracer $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec pour unité graphique 2 cm.

c) Est-il possible de trouver deux tangentes à $\mathcal{C}_f$ qui soient perpendiculaires ?

Partie 2

1.

a) Montrer que pour tout x>0, $f(x)\geq\frac{\sqrt{3}}{x^3}$.

b) Soit (u_n) la suite numérique définie pour tout n entier supérieur à 1 par $u_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$.

Montrer que tout n>1, $\frac{\sqrt{3}}{2}(n^2-1)\leq u_n$.

En déduire la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers + ∞.

2.

a) Montrer que pour tout $x\geqslant3$, $\frac{1}{x^{5/2}}\leq f(x)\leq\frac{1}{x^{5/2}}+\frac{\sqrt{3}}{x^3}$.

b) Soit (v_n) la suite numérique définie pour tout n entier supérieur à 3 par $v_n=\int_3^n f(x)dx$.

Montrer que la suite (v_n) ainsi définie est strictement croissante.

c) Montrer que $\frac{2}{3}(\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{n^{3/2}})\leq v_n\leq\frac{7}{18\sqrt{3}}$.

En déduire que la suite (v_n) converge vers une limite ℓ dont l'expression $\frac{11}{36\sqrt{3}}$ constitue une valeur approchée à 0,05 près.

EXERCICE 2

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On note Δ la droite passant par

A (0,0,1) et de vecteur directeur $\vec{\delta}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et Δ' la droite d'équations $\begin{cases}z=x\\z=y\end{cases}$.

Pour tout nombre réel α, on note P_α, le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n_\alpha}=\begin{pmatrix}\alpha\\-\alpha\\1\end{pmatrix}$.

Partie 1

a) Donner une équation paramétrique de la droite Δ.

b) Déterminer deux points appartenant à la droite Δ' et en déduire un vecteur directeur $\vec{\delta'}$ à Δ'.

c) Pour tout nombre réel α, montrer qu'une équation cartésienne du plan P_α est $\alpha x - \alpha y + z - 1 = 0$.

d) Vérifier que la droite Δ est, quel que soit le nombre réel α, incluse dans le plan P_α.

Partie 2

1.

a) Calculer $\vec{q_\alpha} = \vec{\delta'} \wedge \vec{n_\alpha}$.

b) Montrer que la droite Δ' n'est pas orthogonale au plan P_α.

c) On appelle alors Q_α l'unique plan contenant Δ' et perpendiculaire à P_α. .

Montrer que $\vec{q_\alpha}$ est un vecteur normal au plan Q_α .

d) Montrer que le plan Q_α admet pour équation cartésienne $(\alpha+1)x+(\alpha-1)y-2\alpha z=0$.

2.

Soit R le plan d'équation $x + y = 0$.

a) En résolvant un système d'équation, démontrer que le point I_α de coordonnées $\left(\frac{\alpha}{2\alpha^2+1}; -\frac{\alpha}{2\alpha^2+1}; \frac{1}{2\alpha^2+1}\right)$ est l'intersection des plans P_α, Q_α et R.

b) Soit I le point de coordonnées $\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$.

Montrer que le point I_α appartient au cercle contenu dans le plan R de centre I et de rayon 1/2.

EXERCICE 3

Soit (a_n) la suite numérique définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 2$ et pour tout entier n naturel $a_{n+2} = 8a_{n+1} - 7a_n$.
On définit également la suite (b_n) pour tout entier naturel n par $b_n=a_{n+1} - a_n$.

1.

a) Montrer que la suite (b_n) est géométrique. Préciser sa raison.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer (b_n) en fonction de n.

c) En déduire la limite de la suite (b_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

2.

a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} = a_n$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de (a_n) en fonction de n.

EXERCICE 4

Un fabricant de chaises vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation.
Chaque chaise qu'il produit est soumise à deux contrôles successifs : dans un premier temps, l'aspect de la chaise est examiné afin de vérifier qu'elle ne présente pas de défaut de finition, puis, dans un second temps, sa solidité est testée.

Tournez la page S.V.P.

Il s'avère que :

– le pourcentage de chaises sans défaut de finition est de 92 % ;
– parmi les chaises qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
– 1 % des chaises échouent aux deux contrôles.

On prend au hasard une chaise parmi celles produites. On note :

– F l'événement : « la chaise est sans défaut de finition » ;
– S l'événement : « la chaise réussit le test de solidité ».

1.

a) En utilisant l'énoncé, préciser : p(F), $p_F(S)$ et $p(\overline{F}\cap\overline{S})$.

b) Démontrer que $p_{\overline{F}}(\overline{S})=0{,}125$.

c) Construire l'arbre pondéré correspondant à la situation présentée.

d) Démontrer que p(S)=0, 944.

e) Une chaise a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'elle soit sans défaut de finition. (le résultat sera arrondi au millième)

2.

Les chaises ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 17 €, celles qui ont échoué au contrôle de solidité sont mises au rebut et occasionnent un bénéfice négatif (perte) de 8 € lié au coût de production, les autres chaises rapportent un bénéfice de 3 €.

On désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque chaise un bénéfice (ou une perte).

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

3.

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 chaises.

On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de chaises de ce lot passant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.

Calculer la probabilité qu'au moins 8 chaises de ce lot subissent avec succès le contrôle de solidité. (le résultat sera arrondi au millième)

EXERCICE 5

On considère l'ensemble A des nombres composés de 6 chiffres obtenus en permutant les chiffres 4,5,6,7,8,9, c'est-à-dire en les utilisant tous une seule fois. Par exemple, le nombre 987 654 appartient à l'ensemble A.

1.

a) Combien de nombres contient l'ensemble A ?

b) Les nombres de l'ensemble A sont rangés par ordre croissant.

Parmi les nombres faisant partie de l'ensemble A, quel est le rang du nombre 684 579 ?

c) Quel est le 400e de ces nombres ?

d) Quelle est la somme de ces nombres ?

2.

a) Montrer qu'aucun de ces nombres n'est premier.

b) Montrer qu'aucun de ces nombres n'est le carré d'un nombre entier.